1127 **Bac 2014 SN**

MED Abdellahi Ahmed

Ecole : ARRAJA.

EXO 1 :

(1)

On a ;

$$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$$

1) calculer $P(2i)$:

On a : $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)2i^2 + (1-2i)2i - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= \cancel{-8i} \cancel{-4} + \cancel{8i} + \cancel{2i} \cancel{-4} - \cancel{2i}$

Donc : $P(2i) = 0$

* on peut utilise TD d'horner :

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	↓	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

Alors : $P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

Comme $P(z) = 0 \iff$

$z - 2i = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{z_0 = 2i}$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)$

$\Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3$

$= 3i \iff$

$\boxed{\delta = (i\sqrt{3})^2}$

$\iff z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}}$

$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} =$

$\boxed{z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

* Alors :

l'ensemble de solution

$\boxed{S = \left\{2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right\}}$

$\iff Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$; $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$.

1127 ARRAJA

Suite d'exercice I : Bac 2014 SN

②

2) a) On verifie que une équation cartesienne de la droite (BC) est $2x+1=0$

On a : $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x,y)$

$\Rightarrow M \in (BC) \Rightarrow (\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{2x+1=0}$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \ / \ y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

où : $z' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$\boxed{= (iy)^2 + 3/4}$

Donc M' sur l'axe d'abscises

3) a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{z}z + \bar{z}z + \bar{z}}$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + z\bar{z} + \bar{z}} =$

$\frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z^2| + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ Alors : $|z^2| = 1$

d'où : $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

b)

Si $z = e^{i\theta}$ alors

$\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4)

a) $M \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{B, C\}$

$\Rightarrow z = e^{i\theta}$ et

~~cos~~

$x' + iy' = \frac{\cos}{1+2\cos\theta}$

1127 ARRAJA

suite d'exercice I

1)a) $M \in \mathcal{C}(O;1)$

$\Rightarrow z = e^{i\theta} \Rightarrow x' + iy' = \frac{e^{-i\theta}}{1+2\cos\theta}$

$\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} - i\frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$$\begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{(1+2\cos)^2} = (2x-1)^2$

donc M' est situé sur la courbe Γ d'équation

$x^2+y^2 = (2x-1)^2$.

2) Mq : Γ est une hyperbole :

$\Gamma : x^2+y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Rightarrow 3x^2-4x-y^2 = -1$

$\Rightarrow 3(x^2-\frac{4}{3}x) - y^2 = -1$

$\Rightarrow 3[(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9})-\frac{4}{9}]-y^2 = -1$

$\Rightarrow 3(x-\frac{2}{3})^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$\frac{(x-2/3)^2}{1/9} - \frac{y^2}{13} = 1$

4) b)

$\Gamma : \frac{(x-2/3)^2}{(1/3)^2} - \frac{y}{(\sqrt{3}/3)^2} = 1$

$\Gamma : \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec

$a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{2}{3};0)$ et de sommets :

$S_1 : (\frac{2}{3}+\frac{1}{3};0) = (\frac{1}{3},0)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

d'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

$= \frac{2/3}{1/3} = 2.$